ŠTÚDIUM GEOMETRIE NOŽOV A KINEMATIKY ODVETVOVACEJ HLAVICE LESNÉHO STROJA

Milan Mikleš - Ján Holík

Abstract

Is is usually technical problem to find mathematical ideal shape of knives of delimbing head. Determination of their shape in form general curve could lead to the technical unfeasible dimensions of the head. Criterion of teh optimal shape of cutting contour of head is tightness of encircle of cross section of trunk by knives. Research attention is aimed at conics. Parabola is the most suitable to achieve the best quality of delimbing.

Key words: *delimber, forest machine, delimbing tool*

ÚVOD

Riešenie optimálneho tvaru režúceho obrysu nožov vedie k výberu takého druhu rovnice pre zostrojenie obrysu nožov a k získaniu takých číselných hodnôt parametrov tejto rovnice, pre ktoré priblíženie obrysu nožov k priečnemu prierezu kmeňa sa ukazuje najtesnejšie.

Základnými kritériami hodnotenia kvality odvetvovania prakticky je množstvo zostávajúcich zvyškov vetiev a ich výška. Použitie týchto dvoch kritérií vedie k prognózovaniu a posúdeniu kvality odvetvovania.

Kritériom optimálnosti tvaru režúceho obrysu bol prijatý koeficient tesnosti obopnutia kmeňa režúcim obrysom.

$$K_{op} = \frac{V_1}{V_2} \approx \frac{\sum S_{1j}}{\sum S_{2j}} \leq 1 \tag{1}$$

kde: V_1 – objem kmeňa s priemerom D_{max} na prízemku a D_{min} na vrchnom reze,

V_2 – objem opísaný režúcim obrysom nožov okolo kmeňa,

S_{1j} – plocha kružnice s priemerom Dj; $D_{min} \leq Dj \leq D_{max}$,

S_{2j} – plocha ohraničená režúcim obrysom nožov, ktorý obopína kružnicu s priemerom D_j.

V kritériu je zahrnutý objem medzery medzi kmeňom a režúcim obrysom. Z toho vyplýva, že v tomto kritériu sú vyjadrené tak počet, ako aj výška zostávajúcich vetiev po opracovaní kmeňa. Maximálne hodnoty koeficientu tesnosti (úplnosti) obopnutia kmeňa režúcim obrysom zodpovedá najlepšej kvalite odvetvovania.

Vložením osí súradnicového systému, podľa obr. 1 dostaneme plochu, ohraničenú režúcim obrysom opísaným podľa rovnice $y = f_1(x)$, vo všeobecnom tvare:

$$S_2 = 2n\left[\int_0^{x_1} f_1(x)dx - \frac{x_1 f_1(x_1)}{2}\right] \tag{2}$$

kde *n* - počet nožov režúceho obrysu,

$x_1, f_1, (x_1)$ – súradnice priesečníka dvoch priľahlých nožov.

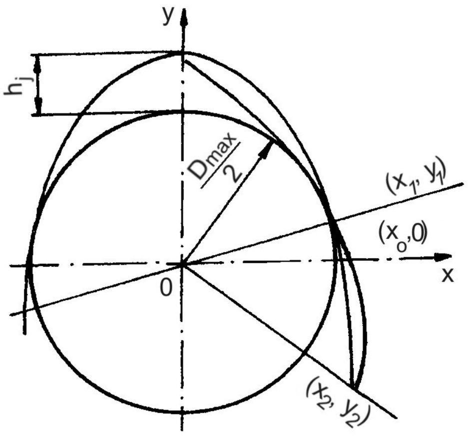
Rovnica (2) platí pri podmienke, ak do medzery medzi kmeňov a jedným z nožov nespadá druhý nôž.

V opačnom prípade treba použiť rovnicu:

$$S_2 = 2n\left[\int_0^{x_1} f_2(x)dx - \frac{x_1 f_1(x_1)}{2}\right] \tag{3}$$

kde $f_2(x)$ – rovnica, graf ktorej je otočený o uhol $\frac{360°}{n}$ ku grafu rovnice $f_1(x)$.

Pre opísanie tvaru režúceho obrysu sa ukazuje, že je najlepšie použiť rovnicu paraboly, pretože touto rovnicou môže byť aproximovaný široký okruh osovo symetrických kriviek (kružnica, elipsa, hyperbola, sinusoida a iné).



Obr. 1

Nájsť matematicky ideálny tvar nože – teda všeobecnú krivku *k* , ktorá by pri posune kmeňa vytvárala s kružnicou kmeňa oskulačný (trojbodový) dotyk v každej polohe – narážalo na technický problém – rozmery noža by museli byť technicky neúnosné. A tak pozornosť sa obrátil na kuželosečky. Z nich najväčšie predpoklady dosiahnuť tieto zámery má parabola.

1 MATEMATICKÉ RIEŠENIE PROBLÉMU

Postupnosť matematického riešenia úlohy:

a) Určenie podmienok pre dotyk paraboly a kružnice – obvodu kmeňa.
b) Výpočet parametra paraboly – tvaru noža tak, aby pri danom počte nožov bol „zvyšok" po odvetvení minimálny.
c) Preverenie podmienky, že nôž sa musí dotýkať kmeňa tak, že dotyk musí byť „vo vnútri" paraboly!
d) Určenie počtu nožov, ktorý je potrebný pri minimálny „zvyšok" vetiev.

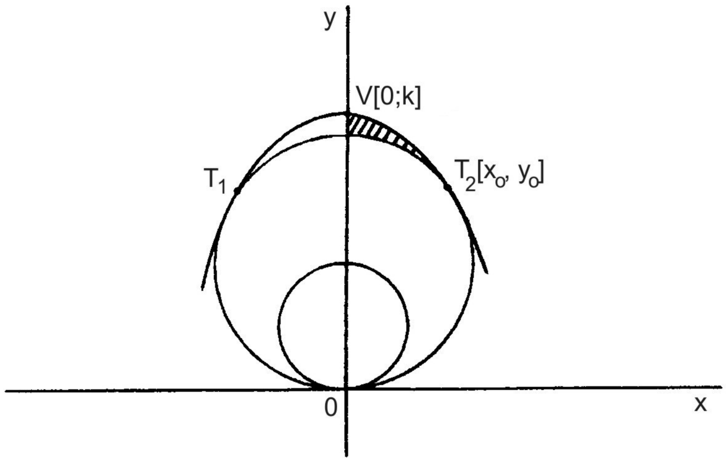
2 URČENIE DOTYKU KRIVIEK – KRUŽNICE (KMEŇA) A PARABOLY (NOŽA)

Matematické úvahy a výpočty v pravouhlej súradnicovej sústave (x, y). Umiestnenie kriviek podľa obrázku č. 2 (kružnice sa dotýkajú osi x v origu stredy sú na osy y; parabola sa dotýka kružníc).
V tejto polohe rovnice kriviek:

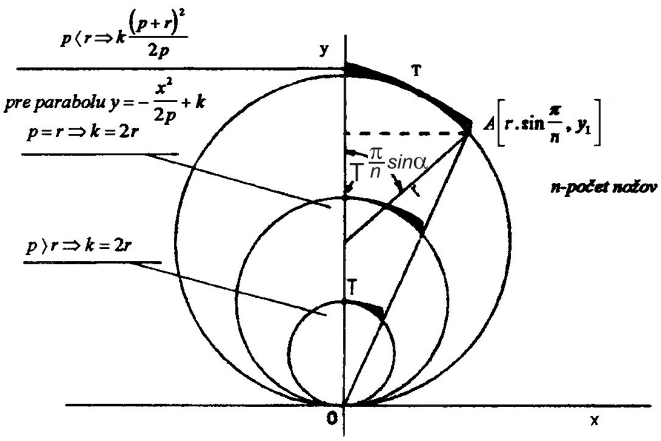
Parabola: $y = -\dfrac{x^2}{2p} + k$ (4)

p - parameter
k – y-ová súradnica vrcholu paraboly

Kružnica: $x^2 + y^2 - 2ry = 0$ (5)
r – polomer kružnice



Obr. 2



Obr. 3

Riešime sústavu (4), (5) rovníc s neznámymi *x,y* a určíme podmienky – vzťahy medzi *r,* p, *k* – pre dvojnásobné korene (resp. až štvornásobné)

$$x^2 + \left(-\frac{x^2}{2p} + k\right)^2 - 2 \cdot r\left(-\frac{x^2}{2p} + k\right) = 0 \tag{6}$$

$$x^2 + \frac{x^4}{4p^2} - \frac{k \cdot x^2}{p} + k^2 + \frac{r \cdot x^2}{p} - 2kr = 0 \,/\cdot 4 \cdot p^2$$

$$4p^2x^2 + x^4 - 4p \cdot k \cdot x^2 + 4p^2 \cdot k^2 + 4p \cdot r \cdot x^2 - 8kp^2r = 0$$

$$x^4 + \left(4p^2 - 4pk + 4pr\right) \cdot x^2 + 4p^2k^2 - 8krp^2 = 0 \tag{7}$$

Dostali sme bikvadratickú rovnicu – má 4 korene.

I.) Dvojnásobné korene dostaneme, ak diskriminant rovnice $D = 0$, teda

$$D = 16\left(p^4 + p^2k^2 + p^2r^2 - 2p^3k + 2p^3r - 2p^2kr\right) - 4\left(4p^2k^2 - 8kp^2r\right) =$$
$$= 16\left(p^4 + p^2r^2 - 2p^3k + 2p^3r\right) = 0$$

z toho: $$k = \frac{(p+r)^2}{2p} \tag{8}$$

a dotykové body: $$x_{1,2}^2 = \frac{4pk - 4p^2 - 4pr}{2} \left(D = 0\right) \tag{9}$$

po dosadení z (8) do (9)

$x_1^2 - x_2^2 = r^2 - p^2$

A teda:

$$x_{11} = x_{21} = \sqrt{r^2 - p^2}$$
$$x_{12} = x_{22} = -\sqrt{r^2 - p^2} \tag{10}$$

a pre y-ové súradnice dotykových bodov – (10) dosadíme do (4).

$$y_1 = y_2 = r + p \tag{11}$$

a tak dotykové body sú:

$$T_1\left[-\sqrt{r^2 - p^2}; r + p\right]$$
$$T_2\left[\sqrt{r^2 - p^2}; r + p\right] \tag{12}$$

(viď. obr. 2)

II.) V prípade I. majú korene (10) význam – sú reálne – len v prípade $r \geq p$.

Preto musíme ešte hľadať iné dvojnásobné korene.

V prípade (10) bolo $x_{11} = x_{21}\left(x_{12} = x_{22}\right)$.

Hľadajme podmienku: $x_{11} = x_{12}$ (resp. i $x_{21} = x_{22}$).

Ale x_{11} , x_{12} sú korene rovnice $x_1^2 = a \Rightarrow$

a teda $x_{11} = x_{12} \Rightarrow \quad x_{11} = \sqrt{a}$

$\sqrt{a} = -\sqrt{a} \quad x_{12} = -\sqrt{a}$

$2\sqrt{a} = 0$

$4a = 0$

$a = 0$

a teda $x_1^2 = 0 \rightarrow$ z toho $x_{11} = x_{12} = 0$

Zistíme ešte podmienku pre k v tomto prípade.
Zrejme z bikvadratickej rovnice (7)
$x_1^2 = 0$ dostaneme, ak absolútny člen rovnice položíme rovný nule.
Teda dostaneme:

$$x^4 + (4p^2 - 4pk + 4pr)x^2 = 0 \tag{13}$$

a podmienka:

$$4p^2k^2 - 8p^2kr = 0 \tag{14}$$

z (14): $k = 2r$ (15)

a skutočne riešením (13):

$$x^2\left[x^2 + (4p^2 - 4pk) + 4pr\right] = 0 \tag{16}$$

1) $x_1^2 = 0 \rightarrow x_{11} = x_{12} = 0$

Poznámka: Musíme ešte dokázať, že zvyšné dva korene sú nie reálne – parabola by sa okrem dotyku ešte pretínala s kružnicou vo dvoch bodoch:

Teda z (16) ešte:

2) $x^2 + 4p^2 - 4pk + 4pr = 0$ (17)

po dosadení z (15) do (17) dostaneme

$$x_{22}^2 = 4p(r - p) \tag{18}$$

aby x_{21}, x_{22} boli imaginárne, zrejme musí platiť v (18): $(r \rangle 0, p \rangle 0)$

$$r - p \langle 0 \Rightarrow r \langle p \tag{19}$$

A tak prípad: $r \langle p$ vedie k dotyku – výsledku: dotykový bod T [0,2] (viď. obr. 3).

Zhrnutie:

- v prípade, ak $p \leq r$ (parameter p sa nemení, polomer kružnice – kmeňa sa mení) pre dotyk je:

$$k = \frac{(p + r)^2}{2p}$$

dotykové body T_i majú súradnice

$$T_i\left[\pm\sqrt{r^2 p^2}; r + p\right] i = 1,2$$

a rovnica paraboly je

$$y = \frac{x^2}{2p} + \frac{(p + r)^2}{2p} \tag{20}$$

- v prípade, ak $p \succ r$, pre dotyk platí:

$k = 2r$

dotykový bod je: $T[0;2r]$ a rovnica paraboly je

$$y = \frac{x^2}{2p} + 2r \tag{21}$$

3 URČENIE VEĽKOSTI PARAMETRA PARABOLY

Teraz potrebujeme vyjadriť veľkosť plochy „zbytku“ pri odvetvovaní na jednom mieste kmeňa (je to plocha ohraničená parabolou a kružnicou – pre zvolený počet nožov: *n* vezmeme plochu pre polovičku jedného noža).
Predpokladajme počet nožov n (n = 2, 3, ...).
Hranice pre určitý integrál (výpočet plochy) – pri polovičke noža budú zrejme:

$$\prec 0;\, r\sin\frac{\pi}{n}\ \rangle \tag{22}$$

Poznámka: V ďalšom výpočte budeme používať rozpätie priemerov kmeňa od 10 cm do 64 cm. (Teda: $r_1 = 5$ až $r_2 = 32$)

Vyznačená plocha v prípade I. je:

$$\int_0^{r\sin\frac{\pi}{n}} \left[-\frac{x^2}{2p} + \frac{(p+r)^2}{2p} \left(r + \sqrt{r^2 - x^2} \right) \right] dx$$

$$\left(y = -\frac{x^2}{2p} + \frac{(p+r)^2}{2p};\ y = r + \sqrt{r^2 - x^2} \right),$$

teda $$P_1 = \int_0^{r\sin\frac{\pi}{n}} \left(\frac{p^2 + r^2 - x^2}{2p} - \sqrt{r^2 - x^2} \right) dx \tag{22a}$$

Pre prípad II.

(parabola: $y = \frac{x^2}{2p} + 2r$; kružnica $y = r + \sqrt{r^2 - x^2}$)

$$P_2 = \int_0^{r\sin\frac{\pi}{n}} \left(r - \frac{x^2}{2p} - \sqrt{r^2 - x^2} \right) dx \tag{22b}$$

„Súčet“ všetkých plôch v prípade I:

$$S_1 = \int_P^{32} \int_0^{r\sin\frac{\pi}{n}} \left(\frac{p^2 + r^2 - x^2}{2p} - \sqrt{r^2 - x^2} \right) dx dr \tag{23a}$$

„Súčet“ všetkých plôch v prípade II:

$$S_2 = \int_5^{P} \int_0^{r\sin\frac{\pi}{n}} \left(r - \frac{x^2}{2p} - \sqrt{r^2 - x^2} \right) dx dr \tag{23b}$$

Úplný „súčet“ je $S = S_1 + S_2$

Po výpočte týchto dvojnásobných integrálov (23a) a (23b) teda dostaneme funkciu parametra paraboly p a počtu nožov n:

$S = f(p, n)$,

$$\begin{aligned} f(p,n) &= -\frac{1}{24}\sin\frac{\pi}{n}.p^3 + 256.\sin\frac{\pi}{n}.p + \\ &+ \left(131072.\sin\frac{\pi}{n} - \frac{349317}{8}.\sin^3\frac{\pi}{n} \right). \\ &.\frac{1}{p}\frac{10881}{2}.\frac{\pi}{n} - \frac{10881}{4}\sin\frac{2\pi}{n} - \frac{125}{3}.\sin\frac{\pi}{n} \end{aligned} \tag{24}$$

Zderivovaním (24) podľa premennej p (n je konštanta) a hľadaním lokálneho minima funkcie sme dostali:
Minimálnu hodnotu nadobudne funkcia (24) pri určitom n ($n = 2, 3, 4, \ldots$) pre

$$p = \sqrt{\frac{2048 - 1397268 \,.\sin \frac{\pi}{n}}{2}} \qquad (25)$$

Pri niektorých technicky reálnych počtoch nožov n sú optimálne hodnoty parametra noža – paraboly:

$n = 2 \rightarrow p = 20{,}808$

$n = 3 \rightarrow p = 22{,}632$

$n = 4 \rightarrow p = 24{,}62$

$n = 5 \rightarrow p = 26{,}01$

$n = 6 \rightarrow p = 26{,}99$

4 URČENIE PODMIENKY PRE MIESTO ZÁBERU NOŽA

Dotyk noža musí byť vo „vnútri" paraboly – „záberu" noža.

Čiže – x-ová súradnica dotykového bodu T_2 – musí byť menšia ako horná hranica intervalu pre určitý integrál – „plochu" polovičky noža.
Teda podľa (12)

$$\sqrt{r^2 - p^2} \prec r.\sin\frac{\pi}{n} \qquad (26)$$

pre: $r_{max} = 32$, $r_{min} = p_{opt}$ $(p_{opt}<32)$ $(r > 0, p > 0)$

Z (26) dostaneme:

$$r^2 - p^2 \prec r^2.\sin\frac{\pi}{n}$$

a teda:

$$r^2.\cos^2\frac{\pi}{n} \prec p_{opt}^2$$

čiže pri $r \succ 0, \cos\frac{\pi}{n} \succ 0, p \succ 0$ je

$$r.\cos\frac{\pi}{n} \prec p_{opt}$$

Tento výraz platí pre n = 2, 3, 4, 5, čo sa dá ľahko dokázať, ak sa vezme v úvahu výraz (25)

5 URČENIE MINIMÁLNEJ PLOCHY (ZBYTKU) PO ODVETVENÍ KMEŇA

Celkový „zbytok" po odvetvení celého kmeňa bude zrejme – úplný súčet S násobený $2.\ n$.

Teda $S_u = S.2n$ (27)

Teraz ešte vzniká otázka, pri akom n – počte nožov bude funkcia $S = f(p, n)$ a teda aj funkcia

$S_u = 2 \,.\, n \,.\, S$ pri optimálnom p minimálna?

Výpočtom sme zistili, že funkcia $f(p, n)$, ak premenná je n, parameter p je konštantný – je klesajúca – so zväčšovaním počtu nožov n sa zmenšuje S, i S_u – teda „zbytok" po odvetvení kmeňa:

Pri $n = 2$ a optimálnom p_{opt} je $S_u \doteq 2258 cm^3$

$n = 3$ p_{opt} je $S_u \doteq 1634 cm^3$

$n = 4$ p_{opt} je $S_u \doteq 1053 cm^3$

$n = 5$ p_{opt} je $S_u \doteq 739 cm^3$

Rozhodnúť o počte nožov je teda už čisto technický problém.

Poznámka: Pri zväčšení $n > 5$ je potrebné zväčšiť aj parameter p.

ZÁVER

Z teoretických rozborov vyplýva, že sústava nožov posuvných okolo kmeňa pracuje pri rovnakom počte kvalitnejšie, ako sústava nožov výkyvných (otáčavých). Najväčším nedostatkom je obtiažne zasúvanie konca kmeňa do otvoru hlavice. U modelov mobilných strojov sú používané nožové hlavice prevažne s výkyvnými nožami. Hlavice harvesterov a procesorov mávajú nepárny počet, pričom stredný nôž je väčšinou nepohyblivý. Tesnosť priloženia nožov ku kmeňu v celom rozsahu odvetvovaných priemerov sa dosahuje prehnutím nožov do tvaru krivky, ktorá býva najčastejšie kužeľosečkou (parabolou). Cieľom príspevku bolo určiť metódu určenia parametrov tvaru (krivky) noža a ich počtu pri zaistení maximálnej kvality odvetvovania.

LITERATÚRA

1. Mikleš, M. a kol.: Teória a stavba lesných strojov II, ES TU Zvolen, 1993, 274 s.
2. Mikleš, M.: Teória technologického vybavenia lesných ťažbových strojov pre stínku a opracovanie stromu, DDP LF TU Zvolen, 1994, 208 s.
3. Mikleš, M.; Mikleš, J.: Logistika výberu parametrov lesného mobilného ťažbového stroja a simulácia zaťaženia, In: Zborník MVK – Mobilné energetické prostriedky – Hydraulika – Životné prostredie – Ergonómia mobilných strojov, VTU Zvolen, 2005, s. 199 - 207